Über discrete Wirbelfäden.

Von **Max Margules.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. April 1880.)

In jenem Theile der Theorie der Wirbelbewegungen, welcher sich auf die Betrachtung discreter Wirbelfäden bezieht, werden gewisse Annahmen gemacht, aber nicht ausgesprochen, welche einer eingehenden Erörterung werth sind. Ich glaube zeigen zu können, dass eine solche Discussion dahin führt, die Giltigkeit der Sätze über die Bewegung mehrerer geradlinigen parallelen Wirbelfäden oder eines kreisförmigen Wirbelfadens abhängig zu machen von Bedingungen, deren Erfüllbarkeit nicht bewiesen werden kann.

Die allgemeinen Lehrsätze, welche Herr Helmholtz in der Abhandlung[1] „Über die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen" abgeleitet hat, gelten unter der Annahme, dass die äusseren Kräfte, welche auf die Flüssigkeit wirken, ein Potential haben. Diejenigen Rechnungen aber, welche sich auf Integrale der hydrodynamischen Gleichungen beziehen, sind gegründet auf eine Untersuchung, welche kein Kräftepotential voraussetzt. Im §. 3 wird nämlich die Aufgabe gestellt, u, v, w, innerhalb einer geschlossenen Fläche S zu bestimmen als Integrale der partiellen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial y}=2\xi,\; \dfrac{\partial w}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial z}=2\eta,\; \dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=2\zeta, \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

ξ, ζ sind innerhalb S als Functionen von t und x, y, z gegeben, welche zwei Bedingungen erfüllen, erstlich die Gleichung:

[1] Borchardt's Journal f. Math. B. 55 (1858).

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \tag{a}$$

zweitens die Grenzbedingung:

$$\xi \cos \alpha + \eta \cos \beta + \zeta \cos \gamma = 0, \tag{b}$$

wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Normale an S mit den Axen der x, y, z bildet. Die Lösung des Problems ist enthalten im Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \\ L = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\xi_a}{r} d\tau_a, \quad M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\eta_a}{r} d\tau_a, \quad N = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\zeta_a}{r} d\tau_a \end{array}\right\} \tag{II}$$

$d\tau_a$ bezeichnet ein Raumelement bei (a, b, c) innerhalb S ξ_a, η_a, ζ_a die Werthe von ξ, η, ζ in (a, b, c), r die Entfernung dieses Punktes von (x, y, z). P ist eine Function, welche die Gleichung $\Delta P = 0$ erfüllt, im Übrigen unbestimmt.

Diese Lösungen setzen nicht die Existenz eines Kräftepotentials voraus. Man kann in einer unbegrenzten Flüssigkeit ξ, η, ζ beliebig wählen, wenn diese Grössen nur die Gleichung (a) erfüllen und im Unendlichen verschwinden; setzt man dann $P = 0$, so sind u, v, w überall eindeutig bestimmt. Sie brauchen aber keineswegs so beschaffen zu sein, dass sie die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{1}$$

befriedigen, welche ausdrücken, dass die äusseren Kräfte ein Potential haben. Ja, man kann im Allgemeinen nicht wissen, wie man ξ, η, ζ wählen soll, damit dieser Bedingung genügt werde. Denn, eliminirt man Π aus den Grundgleichungen, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial t}&=\frac{\partial(u\eta-v\xi)}{\partial y}-\frac{\partial(w\xi-u\zeta)}{\partial z}\\ \frac{\partial\eta}{\partial t}&=\frac{\partial(v\zeta-w\eta)}{\partial z}-\frac{\partial(u\eta-v\xi)}{\partial x}\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}&=\frac{\partial(w\xi-u\zeta)}{\partial x}-\frac{\partial(v\zeta-w\eta)}{\partial y}\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Aus diesen Gleichungen und dem Systeme (I) lassen sich u, v, w und deren Differentialquotienten nicht eliminiren. Man kann also, ehe man die Lösungen der Differentialgleichungen (I) kennt, nicht sagen, ob die gewählten ξ, η, ζ zu solchen Bewegungen führen, welche einem Kräftepotential entsprechen.

Dies muss hervorgehoben werden, weil man gewöhnlich stillschweigend voraussetzt, dass die Rechnungen nur auf solche Fälle angewandt werden, in welchen die Gleichungen (1) erfüllt sind. So sagt Herr Helmholtz: „Bei der gegebenen Vertheilung von ξ, η, ζ können nun theils Wirbellinien vorkommen, welche innerhalb des Raumes S geschlossen sind, theils solche, welche die Grenze von S erreichen und hier abbrechen". Es ist bewiesen, dass diese Eigenschaft den Wirbellinien zukommt, wenn die Gleichungen (1) bestehen; aber die Behauptung lässt sich nicht umkehren: wenn ξ, η, ζ die verlangte Beschaffenheit haben, so folgt daraus nicht, dass die Bewegung den Gleichungen (1) entspricht. Andererseits ist, damit die Formeln (II) anwendbar seien, nicht erforderlich, dass ξ, η, ζ solche Wirbellinien darstellen, welche innerhalb S geschlossen sind (oder an der Grenze von S abbrechen; in letzterem Falle tritt für die Integrale L, M, N ein Raum S_1 an Stelle von S). Wenn nur die Bedingungen (a) (b) erfüllt sind, kann man die Lösungen (II) anwenden. Z. B. sei S der von zwei concentrischen Kugeln begrenzte Raum; der Mittelpunkt der Kugeln liege im Coordinatenanfang, R sei der Abstand eines Punktes vom Centrum, und

$$\xi=f(R)\cdot\frac{xz}{x^2+y^2},\quad \eta=f(R)\cdot\frac{yz}{x^2+y^2},\quad \zeta=-f(R).$$

Diesen Werthen entsprechen ungeschlossene Wirbellinien, nämlich Halbkreise; doch sind die genannten Bedingungen erfüllt.

Will man also auf Flüssigkeitsbewegungen, welche aus den Gleichungen (II) abgeleitet sind, die allgemeinen Sätze über Wirbelfäden anwenden, so muss man erst nachweisen, dass den Gleichungen (2) genügt wird.

Um das in dem Systeme (I) gestellte Problem in speciellen Fällen zu lösen, hat man bei continuirlicher Vertheilung der Wirbelgeschwindigkeit Rechnungen auszuführen, welche sehr weitläufig werden und kaum übersichtliche Resultate liefern können; so dass auch die Verification der Gleichungen (2) unmöglich wird. Es wurden aber jene Rechnungen angewandt auf den Fall discreter Wirbelfäden, d. h. man setzte voraus, ξ, η, ζ haben von Null verschiedene Werthe innerhalb eines sehr kleinen Gebietes, oder in mehreren solchen von einander getrennten Gebieten; in allen übrigen Theilen der Flüssigkeit sollten sich u, v, w aus einem Geschwindigkeitspotential ableiten lassen; an den Grenzen dieser Gebiete aber dürften sich ξ, η, ζ sprungweise ändern, während noch, den Gleichungen (II) gemäss, u, v, w stetig bleiben.[1]

Diese Annahme gibt zu zweierlei Bedenken Anlass. Erstens muss man bezweifeln, ob die allgemeinen Sätze, welche im zweiten Abschnitte der Helmholtz'schen Abhandlung bewiesen wurden, auf solche discrete Wirbelfäden anwendbar sind. Denn alle diese Sätze sind hergeleitet aus den Gleichungen (2), welche wieder durch Differentiation aus den Grundgleichungen entstanden sind; sie setzen demnach voraus, dass sowohl u, v, w als auch deren erste Differentialquotienten überall stetig sind. Werden die letzteren auch nur an einzelnen Stellen discontinuirlich, so gelten die aus den Gleichungen (2) gezogenen Schlüsse im Allgemeinen nicht mehr. Die erste dieser Gleichungen kann geschrieben werden:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}$$

Die linke Seite pflegt man zu schreiben $\frac{d\xi}{dt}$, indem man die Änderung, welche der Werth von ξ in einem bestimmten Flüssigkeitstheilchen während der Zeit dt erfährt, mit $d\xi$ bezeichnet.

[1] Vergl. Kirchhoff: Mechanik (2. Aufl. Leipzig 1877) 20. Vorlesung.

Man schliesst dann, wenn nur zu einer Zeit für ein Theilchen $\xi = \eta = \zeta = 0$, so ist auch $\frac{d\xi}{dt} = 0$, ähnlich $\frac{d\eta}{dt} = 0$, $\frac{d\zeta}{dt} = 0$; also ein Flüssigkeitstheilchen, welches einmal nicht rotirt, rotirt niemals. Dieser Schluss gilt jedoch nur, wenn ξ, η, ζ überall stetig sind; sonst müsste man folgern; die Wirbelgeschwindigkeit verlässt in einem Flüssigkeitstheilchen, welches einmal nicht rotirt, den Werth Null nicht allmälig; aber sie kann plötzlich zu einem endlichen Werthe überspringen.

[Bekanntlich hat Lagrange den mit dem hier besprochenen identischen Satz bewiesen: dass $udx + vdy + wdz$ nur zu einer Zeit ein vollständiges Differential zu sein brauche, damit es stets ein solches bleibe; Poisson hat ohne Angabe eines Grundes die allgemeine Giltigkeit dieses Resultates bezweifelt; sein Zweifel entspringt wohl der Erwägung, dass in dem Beweise die Stetigkeit der Differentialquotienten von u, v, w vorausgesetzt ist.]

Das zweite Bedenken, welches die Annahme discreter Wirbelfäden hervorruft, betrifft die Vertheilung des Druckes an den Flächen, an welchen ξ, η, ζ sich sprungweise ändern. Wenn die Differentialquotienten von u, v, w an einer Fläche innerhalb der Flüssigkeit eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, während u, v, w selbst stetig bleiben, so ändern sich nach den Gleichungen (1) auch $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ sprungweise an jener Fläche. Fassen wir die beiden Gebiete ins Auge, welche von einer solchen geschlossenen Fläche geschieden werden; in dem einen haben ξ, η, ζ endliche Werthe, im andern verschwinden sie. u, v, w sind also Functionen ganz verschiedener Art in und ausser der Fläche; durch diese Grössen und ihre Differentialquotienten ist aber zu einer gegebenen Zeit Π bestimmt bis auf eine Constante; es ist also auch Π eine ganz andere Function von x, y, z im Innern der Fläche als ausserhalb, und man kann — Fälle von singulärer Beschaffenheit ausgenommen — nicht durch eine einzige Constante, über welche man verfügt, bewirken, dass Π an der ganzen Trennungsfläche sich continuirlich überführen lasse. Wenn V das Potential der äusseren Kräfte, p den Druck in der Flüssigkeit, μ ihre Dichte bezeichnet, so ist

$$\Pi = V - \frac{p}{\mu}.$$

Da V sowohl, wie p und μ als continuirliche Functionen angesehen werden müssen, so gelangt man durch die Annahme discreter Wirbelfäden im Allgemeinen zu unzulässigen Folgerungen.

Diesen Folgerungen entgeht man nicht dadurch, dass man die Wirbelfäden unendlich dünn annimmt; dadurch würde allerdings die Trennungsfläche der Gebiete unendlich klein, also könnten auch die Differenzen von Π unendlich klein gemacht werden durch passende Wahl der Constanten. Aber das Rechnen mit unendlich kleinen Werthen kann nur gerechtfertigt sein da, wo man sie als Grenzwerthe endlicher Grössen einführt.

Es erübrigt noch die erhobenen Bedenken an einem Beispiele zu erläutern. Diesem Beispiele will ich jedoch ein anderes voraus-schicken, zugleich den — soviel ich weiss — einzigen Fall, in welchem man die Differentialquotienten der Geschwindigkeitscomponenten unstetig annehmen darf, ohne zu unzulässigen Consequenzen zu gelangen. Man betrachte die Rotation einer Flüssigkeit um eine Axe (welche zur z-Axe gewählt wird). Die Winkelgeschwindigkeit eines Theilchens wird mit ω, die Wirbelgeschwindigkeit mit ζ bezeichnet; die erste bezieht sich auf die fortschreitende Bewegung im Kreise, die andere auf die Drehung um eine der z-Axe parallel durch den Schwerpunkt des Flüssigkeitstheilchens gelegte Gerade. Ist r der Abstand eines Punktes von der z-Axe, und setzt man:

$$u = -y\,.\,\omega(r) \qquad v = x\,.\,\omega(r) \qquad w = 0,$$

so folgt aus (1)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -x\,.\,\omega^2(r) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = -y\,.\,\omega^2(r) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0$$

also:

$$\Pi = -\int \omega^2(r)\,r\,dr + \text{Const.}$$

Ferner hat man:

$$\xi = \eta = o, \qquad \zeta = \omega(r) + \frac{r}{2}\,\frac{d\omega}{dr}$$

Π hängt von $\frac{d\omega}{dr}$ also von den Differentialquotienten der u, v gar nicht ab. Man kann ω und Π als continuirliche Functionen bestimmen, wenn auch ζ als discontinuirliche Function von r gegeben ist; denn man hat

$$\omega = \frac{C}{r^2} + \frac{2}{r^2} \int \zeta\, r dr$$

Man kann die Integrationsconstante an jeder Stelle, wo ζ unstetig wird, so wählen, dass ω stetig bleibt. Setzt man für $r = 0$ $C = 0$ und hat ζ von Null verschiedene Werthe nur zwischen $r = 0$ und $r = R$, so ist ausserhalb des Wirbelcylinders

$$\omega = \frac{2}{r^2} \int_0^R \zeta\, r\, dr,$$

oder indem man $\int_0^R \zeta\; 2\pi r dr = m$ die „Masse“ des Wirbelcylinders nennt: $\omega = \frac{m}{\pi r^2}$. — Diese letztere Formel findet Herr Helmholtz giltig für einen unendlich dünnen Wirbelfaden von beliebig geformtem Querschnitt; hier gilt sie für Wirbelcylinder von endlichem, aber nur kreisförmigem Querschnitt.

[Ein unendlich dünner, cylindrischer Wirbelfaden mit endlichem Werthe m ist mechanisch unmöglich; ζ müsste ein Glied $\frac{\alpha}{r^n}$ enthalten, wo $n > 1$ ist; die Geschwindigkeit der Flüssigkeit $r\omega$ müsste im Faden unendlich gross sein. Lässt man dies zu, so entfällt der Grund, aus welchem man in ω $C = 0$ setzt für $r = 0$; und thut man das Letztere nicht, so gilt auch die Helmholtz'sche Formel nicht mehr; man kann durch passende Wahl von C bewirken, dass um einen Wirbelfaden von endlicher „Masse“ die Flüssigkeit in Ruhe bleibt.]

Man pflegt nun von einem geradlinigen Wirbelfaden zu dem Falle überzugehen, in welchem mehrere solche parallele Wirbelfäden in einer unbegrenzten Flüssigkeit vorhanden sind. Alle auf diesen Fall bezogenen Rechnungen werden bloss auf die Integrale (II), oder vielmehr auf die (wenn $P = 0$ gesetzt wird) für ebene Flüssigkeitsbewegungen geltenden Formeln:

$$u = \frac{\partial N}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial N}{\partial x}, \; N = -\frac{1}{2\pi}\iint \zeta \, lg[(a-x)^2+(b-y)^2] \; da\, db. \quad \text{(IIa)}$$

gegründet, bei deren Ableitung ebenfalls von den Gleichungen (1) kein Gebrauch gemacht wird. Es entsteht also zunächst die Frage: Gibt es überhaupt Lösungen, welche der Existenz zweier oder mehrerer parallelen Wirbelfäden in der Flüssigkeit entsprechen und dabei die Gleichungen (1) befriedigen? Dies ist von vornherein weder gewiss, noch wahrscheinlich und es werden damit alle Untersuchungen über mehrere Wirbelfäden gegenstandslos. Man kann jedoch versuchen, die Bewegung innerhalb der Wirbelfäden von vornherein so anzunehmen, dass sie einem Kräftepotential entspreche; ausserhalb der Fäden existirt ein Geschwindigkeitspotential, also sind die Gleichungen (1) in jedem der einzelnen Gebiete erfüllt. Hier aber stösst man wieder auf die Schwierigkeit, dass Π an den Grenzen der Wirbelfäden unstetig wird. Ich will dies an dem einfachsten Beispiele erläutern.

Zwei parallele Wirbelfäden von gleichem kreisförmigem Querschnitt πa^2 und constanter gleicher und entgegengesetzt gerichteter Rotationsgeschwindigkeit γ, in der Entfernung $2A$ von einander, müssten in einer unbegrenzten Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{\gamma a^2}{2A}$ senkrecht zur Ebene fortschreiten, welche durch ihre Axen gelegt ist; den Formeln (IIa) zur Folge.[1] Sei die y-Axe der Richtung des Fortschreitens gerade entgegengesetzt und von beiden Wirbelfäden gleich weit entfernt. Man setze

$$x_1 = x - A, \quad y_1 = y + \frac{\gamma a^2}{2A}t, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

$$x_2 = x + A, \quad y_2 = y + \frac{\gamma a^2}{2A}t, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

dann ist innerhalb des ersten Wirbelfadens ($r_1^2 \leqq a^2$)

$$u = -\gamma y_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \quad v = \gamma x_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \Pi = \Pi_1;$$

im zweiten Faden, ($r_2^2 \leqq a^2$)

[1] Helmholtz l. c. §. 5.

$$u = \gamma y_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad v = -\gamma x_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad \Pi = \Pi_2$$

und ausserhalb dieser Gebiete:

$$u = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial y}, \quad \Pi = \Pi_3$$

$$\varphi_1 = \gamma a^2 \arctan \frac{y_1}{x_1} \quad \varphi_2 = -\gamma a^2 \arctan \frac{y_2}{x_2}.$$

Diese Ausdrücke entsprechen vollkommen den Formeln (IIa); ausserdem genügen sie in jedem einzelnen Gebiete den Gleichungen (2). An den Grenzen der Wirbelfäden bleiben die Werthe der Geschwindigkeitscomponenten stetig; nicht so die Werthe von Π; denn man berechnet aus den Gleichungen (1) für $r_1^2 \leqq a^2$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} = -\frac{\gamma^2 a^2}{2A} - \gamma^2 x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2\right)$$
$$+ \gamma \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2\psi_2 - x_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}\right)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} = -\gamma^2 y_1 + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2\right)$$
$$+ \gamma \frac{\partial}{\partial y_1}\left(2\psi_2 - x_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - y_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}\right)$$

Hierin bezeichnet ψ_2 die zu φ_2 gehörige conjugirte Function, in diesem Falle ist also

$$\psi_2 = \frac{\gamma a^2}{2} lg(x_2^2 + y_2^2)$$

Man findet sonach:

$$\Pi_1 = f(t) - \frac{\gamma^2 a^2}{2A} x_1 - \frac{\gamma^2}{2} r_1^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2$$
$$+ \gamma \left(2\psi_2 - x_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}\right)$$

Ausserhalb der Wirbelfäden aber gilt:

$$\Pi_3 = F(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \qquad (\varphi = \varphi_1 + \varphi_2)$$

An der Grenze des ersten Wirbelfadens ($y_1 = \sqrt{a^2 - x_1^2}$) ist zu einer bestimmten Zeit $t = T$ Π_3 eine algebraische Function von x, während Π_1 eine transcendente Function dieser Veränderlichen enthält, nämlich ψ_2. Man kann also nicht bewirken, dass längs jenes Kreises Π_1 gleich Π_3 werde.

Mit Recht wird man einwenden, dass das Beispiel ganz willkürlich gewählt ist; aber man versuche doch ein anderes zu finden, welches nicht zu denselben Bedenken Anlass gäbe. Gelingt es — was doch sehr zweifelhaft ist — so gelten die Entwickelungen für den einen Fall, ebenso wie die Sätze für einen einzelnen Wirbelfaden nur als bewiesen gelten, wenn er von kreisförmigem Querschnitt und die Bewegung rings um die Axe gleichartig ist.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass dieselben Erwägungen zu machen sind, bezüglich der Untersuchung, welche über einen kreisförmigen Wirbelring angestellt worden ist. Auch hier nimmt man den Querschnitt des Fadens sehr klein an, um von den Werthen der Geschwindigkeitscomponenten im Innern des Fadens und in seiner Nähe absehen zu können. Dadurch wird es aber auch unmöglich zu beurtheilen, ob die Lösung einem Kräftepotential entspricht.

Die Sätze über die Bewegung discreter Wirbelfäden haben nur dann einen Inhalt, wenn bewiesen werden kann, dass es Lösungen gibt, welche der Existenz solcher (nicht unendlich dünnen) Wirbelfäden entsprechen, welche die Gleichungen (2) überall identisch erfüllen und, entweder die Differentialquotienten von u, v, w in den Fäden und an ihren Grenzen continuirlich sein lassen, oder gestatten, dass trotz der Unstetigkeit der genannten Grössen, die durch die Gleichungen (1) definirte Function Π als eine innerhalb der ganzen Flüssigkeit stetige Grösse bestimmt sei. Im letzteren Falle wäre noch speciell zu untersuchen, ob die Wirbelfäden stets aus denselben Flüssigkeitstheilchen zusammengesetzt bleiben.
